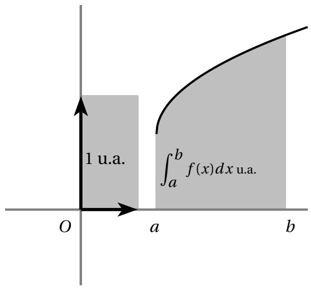
Chapitre n° 11 Calcul intégral

8 avril 2022

1 Notion d'intégrale



Définition 1 (Intégrale d'une fonction positive)

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. L'*unité d'aire* (notée u.a.) est l'aire du rectangle de côtés $||\vec{\imath}||$ et $||\vec{\jmath}||$.
Soient $a \leq b$ réels et f une fonction positive sur l'intervalle $[a;b]$.
L'*aire $\mathscr{A}$ sous la courbe représentative de f entre a et b* est, lorsqu'elle existe, l'aire du domaine composé des points $M(x;y)$ vérifiant $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$, exprimée en unités d'aires.

Notation 1. L'aire sous la courbe représentative de f entre a et b est notée

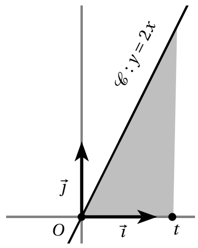
$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{« intégrale de } f \text{ entre } a \text{ et } b \text{ »}$$

Théorème 2. (admis) L'aire sous la courbe d'une fonction positive et continue sur $[a;b]$ existe.

Exemple 1.

$$\int_a^b m\,dx = m \times (b-a)$$

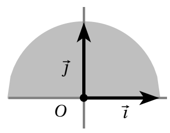
Soit $t > 0$. $\displaystyle\int_0^t 2x\,dx = \frac{t \times 2t}{2} = t^2$



Dériver par rapport à t le résultat obtenu. Remarque ?
En dérivant par rapport à t, on retrouve la fonction qu'on a intégrée.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi \times 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

En effet, $M(x;y) \in \mathscr{C} \iff x^2 + y^2 = 1$

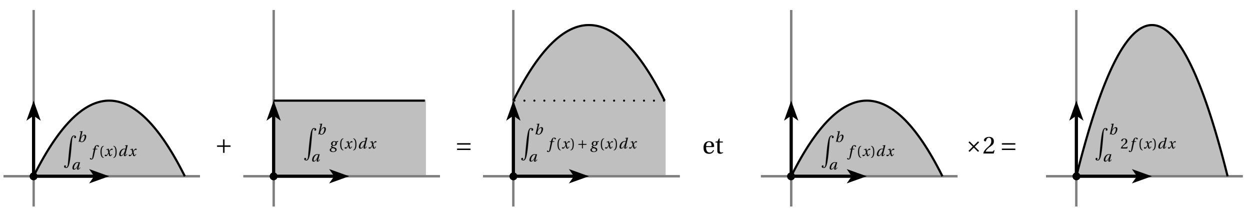


Propriété 3 (Linéarité)

Si les fonctions f et g sont continues sur un intervalle $[a,b]$, et $c \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \text{ et } \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

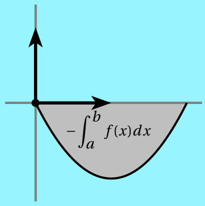
Preuve. Pour des fonctions et constantes positives, cela découle des propriétés des aires :



Définition 4 (Intégrale d'une fonction continue)

On étend la définition de l'intégrale à une fonction quelconque en respectant la linéarité : soit f continue sur $[a;b]$ avec $a \leq b$.

- ⋆ si $f(x) \leq 0$ sur $[a;b]$, on pose $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx$: l'intégrale correspond alors à l'opposé de l'aire au dessus de la courbe.
- ⋆ si $f(x) \geq m$ sur $[a;b]$, on pose $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (f(x)-m)dx + \int_a^b m dx$.



Remarque 1. En admettant que toute fonction continue admet un minimum m sur un intervalle fermé, on sait définir l'intégrale d'une fonction continue sur $[a;b]$.

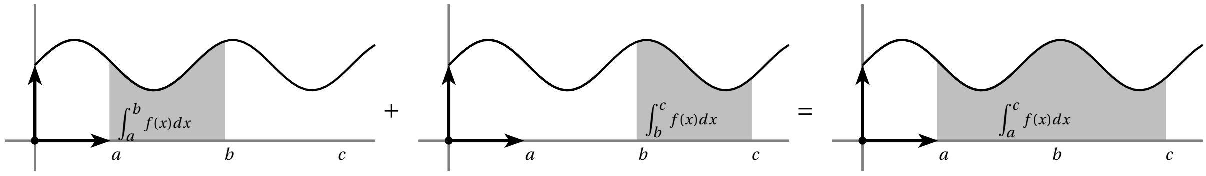
2 Propriétés des intégrales

Propriété 5 (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a, b, c \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad \text{de plus : } \int_a^a f(x)dx = 0$$

Preuve. Lorsque $a \leq b \leq c$ il s'agit de l'additivité des aires :



Définition 6 ($a \geq b$)

On étend la définition de l'intégrale au cas où $b \leq a$ en respectant la relation de Chasles :
$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Propriété 7 (Positivité)

Soient f et g continues sur un intervalle I et $a \leq b \in I$. Alors :

① si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Si de plus $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors $f = 0$.

② si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

③ si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Preuve. Le premier point est une propriété des aires, le second découle de la linéarité de l'intégrale et le dernier est une application du second au cas où l'un des membres est constant.

Exemple 2. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_n^{n+1} e^{-x^2}\,dx$.

Encadrer I_n et déterminer la limite de la suite (I_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \to e^{-x^2}$ est continue sur $[n; n+1]$ donc $I_n = \int_n^{n+1} e^{-x^2}dx$ existe.
Soit $x \in [n; n+1]$. On a : $n \leq x \leq n+1 \implies -(n+1)^2 \leq -x^2 \leq -n^2$ car la fonction $x \to -x^2$ est décroissante sur $[n; n+1]$
Et $-(n+1)^2 \leq -x^2 \leq -n^2 \implies e^{-(n+1)^2} \leq e^{-x^2} \leq e^{-n^2}$ par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, par positivité de l'intégrale vue précédemment :
$\int_n^{n+1} e^{-(n+1)^2} dx \leq \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx \leq \int_n^{n+1} e^{-n^2} dx$ donc :
$e^{-(n+1)^2} \int_n^{n+1} 1dx \leq I_n \leq e^{-n^2} \int_n^{n+1} 1dx$
soit $e^{-(n+1)^2} \leq I_n \leq e^{-n^2}$
Le théorème des gendarmes permet alors de conclure :
$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

Exemple 3. Pour $x > 0$ on pose $F(x) = \int_1^x \frac{du}{u}$. Calculer $F(1)$. Montrer que F est croissante.

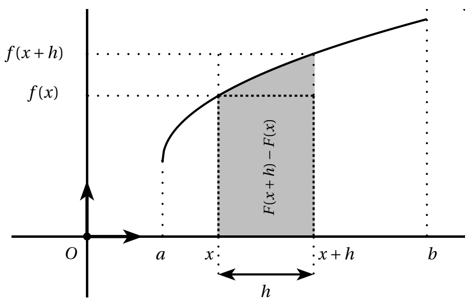
Donner son signe.

$F(1) = 0$ car c'est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, les deux droites identiques d'équation $x = 1$ et la courbe de la fonction inverse.
Soient $a, b \in]0; +\infty[$ avec $b > a$.
$F(b) - F(a) = \int_1^b \frac{du}{u} - \int_1^a \frac{du}{u} = \left(\int_1^a \frac{du}{u} + \int_a^b \frac{du}{u}\right) - \int_1^a \frac{du}{u}$ (relation de Chasles)
$F(b) - F(a) = \int_a^b \frac{du}{u} > 0$ comme intégrale d'une fonction positive.
Soit $x > 0$. La fonction inverse étant positive sur $]0; +\infty[$, on a :
Si $x < 1$ alors $F(x) = \int_1^x \frac{du}{u} = -\int_x^1 \frac{du}{u} < 0$
Si $x > 1$ alors $F(x) = \int_1^x \frac{du}{u} > 0$

3 Théorème fondamental de l'intégration

Théorème 8

♥ Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$. La fonction définie sur I par
$F : x \mapsto \int_a^x f(u)du$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.



Preuve. Pour simplifier, on suppose en plus f croissante sur $[a, b]$. Soient $x \in [a, b]$ et $h > 0$ tel que $x + h \in [a; b]$.

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Comme f croissante, $f(x) \leq f(t) \leq f(x+h)$ pour $t \in [x; x+h]$. Par la propriété 7 :

$$\int_x^{x+h} f(x)dt \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq \int_x^{x+h} f(x+h)dt \iff f(x)\int_x^{x+h} 1dt \leq F(x+h) - F(x) \leq f(x+h)\int_x^{x+h} 1dt$$
$$\iff (x+h-x)f(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq (x+h-x)f(x+h) \iff f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h).$$

En raisonnant de même pour h négatif, on obtient une inégalité en sens inverse :

Soient $x \in [a, b]$ et $h < 0$ tel que $x + h \in [a; b]$.

$$F(x) - F(x+h) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_{x+h}^a f(t)dt = \int_{x+h}^x f(t)dt.$$

Comme f croissante, $f(x+h) \leq f(t) \leq f(x)$ pour $t \in [x+h; x]$. Par la propriété 7 :
$$\int_{x+h}^{x} f(x+h)dt \leq \int_{x+h}^{x} f(t)dt \leq \int_{x+h}^{x} f(x)dt \iff (x-(x+h))f(x+h) \leq F(x)-F(x+h) \leq (x-(x+h))f(x)$$
$$\iff f(x+h) \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x).$$

Or f est continue : $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. D'où : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x) = f(x)$.

4 Calcul d'intégrales

Théorème 9

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et F une primitive de f sur I. En notant $[F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$, on a :
$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a).$$

Preuve. Comme $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f, il existe une constante c telle que $F(x)+c = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Ainsi, $F(a)+c = \displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$ d'où $c = -F(a)$.

En posant $x = b$ on obtient $F(b)-F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Exemple 4. $\displaystyle\int_1^2 3x^2 dx = \Big[x^3\Big]_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^x\,dx = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^0 = \sqrt{\mathrm{e}}-1$$
$$\int_2^3 x^2\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_2^3 = \frac{1}{3}(3^3-2^3) = \frac{19}{3}$$
$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = \cos 0 - \cos\pi = 2$$

5 Intégration par parties

Théorème 10

Soient u et v deux fonctions dérivables et dont les dérivées sont continues sur $I = [a;b]$ alors :
$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

Preuve. uv est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I et
$(uv)' = u'v + uv'$ c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, on a $u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)$.
Les deux membres étant des fonctions continues sur I, elles sont intégrable sur I :
$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x) - u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$
Une primitive de $(uv)'$ étant uv, on a, par théorème fondamental de l'intégration :
$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \Big[uv)(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Exemple 5. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 (2t-1)\mathrm{e}^t dt$ ....

6 Applications

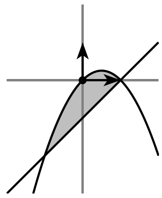
6.1 Aire entre deux courbes

Théorème 11

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ (donc $a \leq b$) telles que sur cet intervalle on ait : $g \leq f$.
L'aire du plan limitée par les courbes de f et de g ainsi que les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée en unités d'aires par :

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x.$$

Exemple 6. Calculer en $u.a.$ l'aire du domaine décrit par $-1 \leq x \leq 1$ et $x - 1 \leq y \leq x - x^2$



Dans un repère orthonormé d'unité 0,5 cm :
$A = \int_{-1}^{1} -x^2 + x - (x-1)\,dx = \int_{-1}^{1} -x^2 + 1\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} + [x]_{-1}^{1} = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}u.a = \frac{4}{3}\frac{1}{4}\,cm^2 = \frac{1}{3}\,cm^2$

6.2 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 12 (Valeur moyenne)

La valeur moyenne d'une fonction continue f sur un intervalle $[a;b]$ est

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Remarque 2. Dans le cas d'une fonction positive, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire sous la courbe.
Considérons le rectangle de même aire et de même largeur $b - a$.
La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est cette aire divisée par la longueur de l'intervalle d'intégration (donc par la largeur de ce rectangle).
La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est donc bien $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Exemple 7. moyenne de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ entre 1 et 5 :
$m = \frac{1}{5-1}\int_1^5 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^5 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$

7 Primitives de référence

$f(x)$	$F(x)$	Domaine de validité	Condition
a	$ax+b$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+c$	$]0;+\infty[$	
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$ si $n>0$ et $]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$ si $n<0$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1;0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0,+\infty[$	
$\cos(x)$	$\sin(x)+c$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)+c$	$\mathbb{R}$	
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)+c$	I	$u>0$ dérivable sur I
$u'(ax+b)$	$\frac{1}{a}u(ax+b)+c$	$ax+b \in I$	u dérivable sur I
$u'e^u$	e^u+c	I	u dérivable sur I
$u' \times u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	I	u dérivable (et non nulle si $n<0$) sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	I	$u>0$ dérivable sur I